MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula, segundo os valores de a, o rango de A. Calcula, se existe, a inversa de A cando $a = 0$.

b) Para $a = 0$. calcula a matriz B que verifica $ABA^{-1} - A = 2I$.

c) Para $a = 1$, calcula todas as matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Dados os planos $\pi_1: 3x + 3z - 8 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \lambda - \mu \\ y = \quad -\lambda + \mu \\ z = 3 + 2\lambda + \mu \end{cases}$

a) Calcula o ángulo que forman π_1 e π_2. Calcula as ecuacións paramétricas da recta que pasa por $(0,0,0)$ e é paralela a π_1 e π_2.

b) Calcula o punto simétrico do $(0,0,0)$ respecto do plano π_1.

3. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

b) Dunha función $f(x)$ sabemos que $f(-1) = 1$ e que a súa función derivada é

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x < 0 \\ e^{2x} - 2 & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula as ecuacións das rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos de abscisa: $x = -2$ e $x = \frac{ln2}{2}$

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $y = x(x-2)$, o eixe de abscisas e a recta $y = x$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixes, o vértice e a concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m, o sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 4x + my + 3z &= m \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

b) Resólveo cando $m = 5$.

2. Dadas as rectas $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ $\quad s: \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 2y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que contén a r e é paralelo a s.

c) Calcula a distancia entre r e s.

3. Debuxa a gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$ estudando: dominio, simetrías, puntos de corte cos eixes, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

4. a) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica da función $F(x) = \int_0^x \frac{t^2+6}{2+e^t} dt$, no punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcula $\int_0^1 x ln(1+x) dx$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo cálculo do rango de A.
- 0,5 puntos polo cálculo da inversa de A,cando $\alpha = 0$.

b) 1 punto

c) 1 punto

2) a) 1,5 puntos:

- 0,75 puntos polo cálculo do ángulo que forman os planos.
- 0,75 puntos pola obtención das ecuacións paramétricas da recta.

b) 1,5 puntos

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola definición da derivada dunha función nun punto.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1 punto:

- 0,5 puntos pofa determinación de $f(x)$
- 0,5 puntos polas ecuacións das rectas tanxentes (0,25 puntos por cada una)

4) 2 puntos:

- 0, 5 puntos polo debuxo da rexión.
- 1 punto pola formulación da área en termos de integrais definidas.
- 0,5 puntos polo cálculo das integrais definidas.

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos:

- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
- 1 punto pola discusión do sistema

b) 1 punto

2) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

3) 2 puntos:

- 0,25 puntos: estudo de dominio, puntos de corte cos eixes e simetrías.
- 0,25 puntos: estudo de asíntotas.
- 0,5 puntos: estudo de intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos
- 0,5 puntos: estudo de puntos de inflexión, intervalos de concavidade e convexidade.
- 0,5 puntos: debuxo da gráfica.

4) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.
- 0,5 puntos polo cálculo da recta tanxente.

b) 1 punto:

- 0,5 puntos: integración por partes
- 0,25 puntos: integración de función racional
- 0,25 puntos: cálculo da integral definida

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

***Exercicio 1*:**

a) $\begin{vmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = -a(a-2) - a^2 - 2(a-1)(a-2) = -a^2 + 2a - a^2 - 2a^2 + 6a - 4 =$

$= -4a^2 + 8a - 4$

Así

$$|A| = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Se $a = 1$, existen menores de orde 2 non nulos, por exemplo

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Polo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1 \Rightarrow rang(A) = 2 \\ a \neq 1 \Rightarrow rang(A) = 3 \end{array}}$$

Se $a = 0$, xa vimos que $|A| = -4 \neq 0$, polo que existe A^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b)

$$ABA^{-1} - A = 2I \Leftrightarrow ABA^{-1} = A + 2I \Leftrightarrow B = A^{-1}(A + 2I)A = (I + A^{-1}) = A + 2I$$

$$\boxed{B = A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

c) $a = 1 \Rightarrow rang(A) = 2$. É un sistema homoxéneo con $rang(A) = 2 < nº\ incógnitas$. Sistema compatible indeterminado con infinitas solucións:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = z \\ x = -2z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

***Exercicio 2*:**

a) Determinamos os vectores normais aos planos:

$\vec{n}_{\pi_1} = (3,0,3) \ || \ (1,0,1)$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-3,0) \ || \ (1,1,0)$$

O ángulo α que forman os planos coincide co ángulo que forman os seus vectores normais. Así:

$$cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}||\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$$

Se chamamos r á recta pedida e $\vec{v}_r$ a un vector director dela,

$$\left.\begin{array}{l} r||\pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi_1} \\ r||\pi_2 \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,1)$$

Como a recta pasa polo punto (0,0,0), as ecuacións paramétricas son:

$$\boxed{r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

b) Sexa s a recta perpendicular a π_1 pasando polo punto $(0,0,0)$ e $\vec{v}_s$ o seu vector director, entón:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{s}\perp\pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_s \perp \vec{n}_{\pi_1} = (1,0,1) \\ (0,0,0) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

O punto de intersección, M, de s con π_1 é o punto medio do segmento OO' (O' simétrico de $O(0,0,0)$).

Calculamos o punto M de intersección de s con π_1

$$3\lambda + 3\lambda - 8 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \Rightarrow M(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3})$$

Se $O'(x,y,z)$, entón:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{3} = \frac{0+x}{2} \\ 0 = \frac{0+y}{2} \\ \frac{4}{3} = \frac{0+z}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{O'(\frac{8}{3}, 0, \frac{8}{3})}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

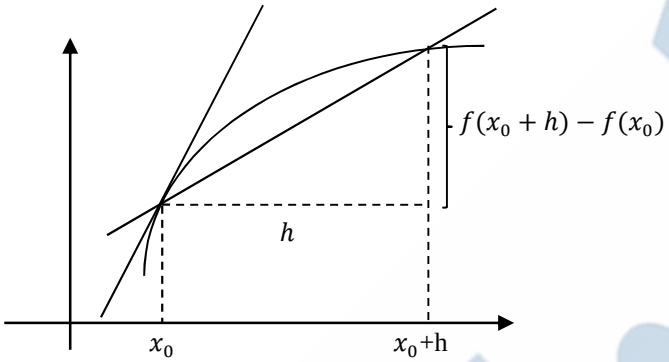
OPCIÓN A

***Exercicio 3*:**

a) Dise que $f(x)$ é derivable no punto x_0, se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

represéntase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en x_0.



Interpretación xeométrica: A recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0)), (x_0+h, f(x_0+h))$ ten por pendente $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e cando $h\to 0$, esta secante acércase á recta tanxente pasando polo punto $(x_0, f(x_0))$. Así:

$$\boxed{\text{Pendente da recta tanxente en } (x_0, f(x_0)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$$

b)

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+m & se\ x<0 \\ \frac{1}{2}\,e^{2x}-2x+n & se\ x\geq 0\end{cases}$$

$f(-1)=1 \Rightarrow 1=1+1+m \Rightarrow m=-1$

E por ser continua en $x=0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow -1=\frac{1}{2}+n \Rightarrow n=-\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & se\ x<0 \\ \frac{1}{2}\,e^{2x}-2x-\frac{3}{2} & se\ x\geq 0\end{cases}$$

Recta tanxente en $x=-2$:

$f(-2)=5$

$$y-f(-2)=f'(-2)(x+2) \Rightarrow \boxed{y=-5x-5}$$

$f'(-2)=-5$

Recta tanxente en $x=\frac{ln2}{2}$:

$f\left(\frac{ln2}{2}\right)=-\frac{1}{2}-ln2$

$$y-f\left(\frac{ln2}{2}\right)=f'\left(\frac{ln2}{2}\right)\left(x-\frac{ln2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}+ln2}$$

$f'\left(\frac{ln2}{2}\right)=0$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

***Exercicio 4*:**

$y = x(x-2) = x^2 - 2x$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \;\Rightarrow y = 0 \\ x(x-2) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x = 2 \end{cases} \end{array}\right\}$$

Puntos de corte cos eixes:

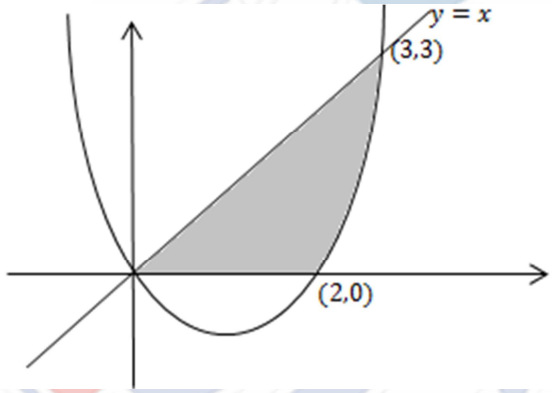
$(0,0)$ e $(2,0)$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 2x - 2 \\ y' = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1 \\ y'' = 2 < 0 \end{array}\right\}$$

Mínimo e vértice $(1,-1)$. Convexa

Intersección da parábola coa recta $y = x$:

$x^2 - 2x = x \;\Rightarrow\; x^2 - 3x = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ Puntos de corte: $(0,0), (3,3)$



Polo tanto:

$$A = \int_0^2 x dx + \int_2^3 [x - (x^2 - 2x)] dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_2^3 = 2 - 9 + \frac{27}{2} + \frac{8}{3} - 6$$
$$= \frac{-78 + 81 + 16}{6}$$

$$\boxed{A = \frac{19}{6}\, u^2}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

***Exercicio 1*:**

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 & m \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2 \\ \\ \text{Orlamos este menor} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = m + 12 + 6 - 2m - 9 - 4 = -m + 5 \end{array}\right\} \Rightarrow rang(C) = \begin{cases} 2 & se\ m = 5 \\ 3 & se\ m \neq 5 \end{cases}$$

<u>Discusión:</u>

$$\boxed{\begin{array}{c} m = 5, \ \ rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ indeterminado. \\ m \neq 5, \quad rang(C) = rang(A) = 3 = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado. \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 5}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + z = 1 - y \\ 4x + 3z = 5 - 5z \end{array}\right\}$$

Entón:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-y & 1 \\ 5-5y & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(3 - 3y - 5 + 5y) = 2 - 2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-y \\ 4 & 5-5y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(5 - 5y - 4 + 4y) = y - 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \qquad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + \lambda \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

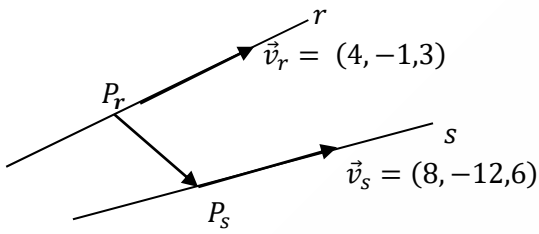
OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Calculamos o vector director da recta s:

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (8, -12, 6)$$

Como os vectores $\vec{v}_r = (4, -1, 3)$ e $\vec{v}_s = (8, -12, 6)$ non son proporcionais, xa podemos dicir que as rectas córtanse ou crúzanse.



Tomamos un punto en cada recta. Por exemplo:

$$P_r(3,2,1) \in r; \;\; P_s(2,0,-\frac{3}{4}) \in s$$

e consideramos o vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, -2, -\frac{7}{4})$

Se os vectores que marcan as dirección das rectas, e o vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ que vai dunha á outra son independentes, daquela non están no mesmo plano. Isto saberémolo vendo se o determinante formado por eles é distinto de cero ou non:

$$(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \\ -1 & -2 & -\frac{7}{4} \end{vmatrix} = 40 \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{As\ rectas\ crúzanse}$$

b) Sexa π o plano buscado. Como o plano contén á recta r, $P_r(3,2,1) \in \pi$. Ademais, os vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ son vectores do plano. Polo tanto:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \end{vmatrix} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{\pi:\ 3x - 4z - 5 = 0}$$

c) Como o plano π é paralelo á recta s e contén á recta r

$$d(r,s) = d(s,\pi) = d(P_s,\pi) = \frac{|6+3-5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \boxed{4/5}$$

Tamén podemos calcular esa distancia utilizando a fórmula da distancia entre dúas rectas

$$d(r,s) = \frac{\left|(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s})\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \\ -1 & -2 & -\frac{7}{4} \end{matrix} \right\|}{\sqrt{(30)^2 + (40)^2}} = \boxed{4/5}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 3:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$$

Dominio:

A función non está definida onde se anula o denominador. Polo tanto, o dominio é $\mathbb{R}-\{2\}$

Simetrías:

$f(-x) = 1 + \frac{2}{(-x-2)^2} \neq \pm f(x)$. Polo tanto non é simétrica respecto do eixe Y nin respecto da orixe.

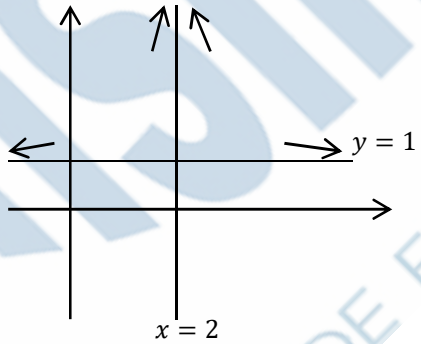
Puntos de corte cos eixes:

$f(x) > 0$. Polo tanto non corta ao eixe de abscisas.

$x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Corta ao eixe de ordenadas no punto $(0, \frac{3}{2})$

Asíntotas verticais:

$$\left.\begin{array}{l} lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty \\ \\ lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 \text{ asíntota vertical}$$



Asíntotas horizontais:

$lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ asíntota horizontal

Non hai asíntotas oblicuas

Intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos:

$f'(x) = -\frac{4(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{4}{(x-2)^3} \neq 0 \Rightarrow$ Non hai puntos críticos

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

A función é crecente en $(-\infty, 2)$ e decrecente en $(2, +\infty)$. Non hai máximos nin mínimos.

Intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión:

$f''(x) = = \frac{12(x-2)^2}{(x-1)^6} = \frac{12}{(x-1)^4} > 0$. Non hai puntos de inflexión

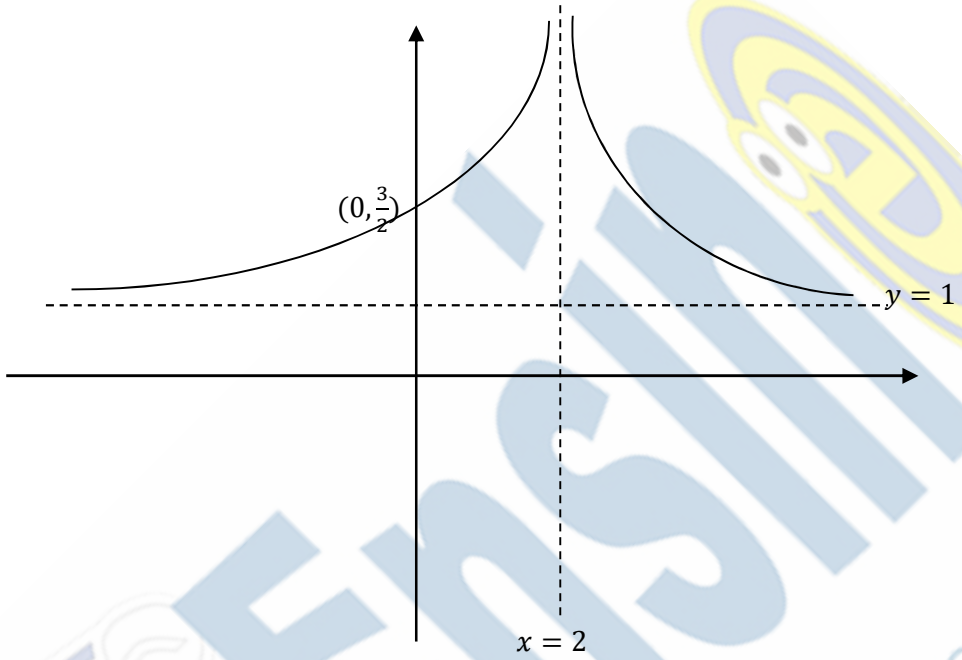
	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	∪	∪

Convexa en todo o seu dominio

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$



CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

a) *Teorema fundamental do cálculo integral*: Se $f(x)$ é una función continua en $[a,b]$, entón a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e ademais $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

Aplicación:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Recta tanxente: } y - F(0) = F'(0)(x-0) \\ F(0) = 0 \\ F'(x) = \frac{x^2+6}{2+e^x} \Rightarrow F'(0) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Recta\ tanxente: y = 2x}$$

b) Calculamos a integral indefinida

$$\int xln(1+x)dx = \frac{x^2}{2} ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{x^2}{2} ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)dx =$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x} \\ dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

(grao numerador>grao denominador. Facemos a división)

$$= \frac{x^2}{2} ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{ln(1+x)}{2} + C$$

Aplicamos Barrow:

$$\int_0^1 xln(1+x)dx = \left[\frac{x^2}{2} ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{ln(1+x)}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2$$

$$\boxed{\int_0^1 xln(1+x)dx = {}^1/_4}$$