MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2puntos, exercicio 4= 2puntos)

OPCIÓN A

1. a) Define menor complementario e adxunto dun elemento nunha matriz cadrada.

b) Sexan I a matriz identidade de orde 3 e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina os valores de λ para os que $A + \lambda I$ non ten inversa.

c) Calcula a matriz X que verifica $AX - A = 2X$, sendo A a matriz dada no apartado b).

2. Dado o plano $\pi: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 - 2\lambda + \mu \\ z = 4 + 3\mu \end{cases}$ e a recta $r: \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de π e r. Se se cortan, calcula o punto de corte.

b) Calcula o ángulo que forman π e r. Calcula o plano que contén a r e é perpendicular a π.

3. a) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{cosx - e^{-2x} - 2x}{sen^2 x}$

b) Queremos dividir un fío metálico de 70 metros de lonxitude en tres partes de maneira que unha delas teña dobre lonxitude que outra e ademais que ao construír con cada parte un cadrado, a suma das áreas dos tres cadrados sexa mínima. Calcula a lonxitude de cada parte.

4. a) A segunda derivada dunha función $f(x)$ é $f''(x) = 4e^{2x} - 2x$. Ademais a tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(0,1)$ é paralela á recta $x - y + 3 = 0$. Calcula $f(x)$.

b) Calcula $\int_0^{\pi/2} x sen(2x + \pi) dx$

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m, o sistema:

$$\begin{aligned} x + my + (m-1)z &= m \\ (m-1)y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, para $m = 3$.

2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x + y - 2z - 5 = 0 \\ y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa. Se se cortan, calcula o punto de corte.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral e as ecuacións paramétricas do plano que contén a r e a s.

c) Calcula a distancia do punto $Q(1,1,4)$ á recta s.

3. Dada a función $f(x) = \begin{cases} mx & se \ \ x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & se \ \ x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula os valores de a, b e m para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$ e teña un extremo relativo en $x = 3$.

b) Enuncia o teorema do valor medio do cálculo diferencial. Para os valores $a = 1$, $b = -6$ e $m = -4$, calcula, se existe, un punto $c \in (0,5)$ tal que a tanxente á gráfica de $f(x)$ en $x = c$ sexa paralela ao segmento que une os puntos $(0,0)$ e $(5,-4)$.

4. a) Calcula $\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x} dx$

b) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Se $F(x) = \int_0^x \frac{2}{3+3e^t} dt$, calcula $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1. **a) 0,5 puntos**

b) 1 punto

c) 1,5 puntos

2. a) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa da recta e o plano
- 0,5 puntos pola obtención do punto de corte.

b) 1,5 puntos, distribuidos en:

- 0,5 puntos pola determinación do ángulo que forman a recta e o plano.
- 1 punto polo plano que contén á recta e é perpendicular ao plano dado.

3. a) 1 punto

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola expresión da función a minimizar
- 0,5 puntos pola determinación do punto crítico e xustificar que é mínimo.

4. a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola obtención de $f'(x)$
- 0,5 puntos polal obtención de $f(x)$

b) 1 punto

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

1. **a) 2 puntos,** distribuidos en:

   - 1 punto pola determinación dos rangos segundo os valores de m.
   - 1 punto pola discusión do sistema.

   b) 1 punto.

2. **a) 1,5 puntos**, distribuidos en:

   - 1 punto pola posición relativa das rectas.
   - 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

   b) 0,75 puntos

   c) 0,75 puntos

3. **a) 1 punto**

   b) 1 punto, distribuído en:

   - 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
   - 0,5 puntos pola determinación do punto

4. **a) 1 punto**

   b) 1 punto, distribuído en:

   - 0,5 puntos polo enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.
   - 0,5 puntos pola aplicación do teorema fundamental do cálculo integral.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) Dada unha matriz cadrada de orde n, chámase menor complementario do elemento a_{ij}, ao valor do determinante da matriz de orde n-1 que resulta de suprimir a fila i e a columna j. Represéntase por α_{ij}.
Chámase adxunto do elemento a_{ij} a: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$, é dicir é o menor complementario co seu signo ou con signo cambiado, segundo que $i+j$ sexa par ou impar.

b) $A + \lambda I$ non ten inversa $\Leftrightarrow |A + \lambda I| = 0$

$$|A + \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1+\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^3 - 4(1+\lambda) = (1+\lambda)[(1+\lambda)^2 - 4] =$$
$$= (1+\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3) = (1+\lambda)(\lambda-1)(\lambda+3)$$

Polo tanto

$$\boxed{A + \lambda I \text{ non ten inversa} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}}$$

por b), $\exists (A-2I)^{-1}$

c) $AX - A = 2X \Leftrightarrow (A-2I)X = A \Leftrightarrow X = (A-2I)^{-1}\cdot A$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad |A - 2I| = -1 + 4 = 3$$

$$(A-2I)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 4/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \\ 4/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 4/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \\ 4/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Determinamos un vector director da recta:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,0,1)$$

Determinamos un vector normal ao plano:

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6,-6,0)$$

Entón:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 6 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r\ e\ \pi\ córtanse\ nun\ punto}$$

O vector $(1,1,0)$ ten a dirección de $\vec{n}_\pi$ e o punto $P(2,1,4) \in \pi$. Así, a ecuación implícita do plano π é:

$$x - 2 + y - 1 = 0 \Rightarrow \pi: x + y - 3 = 0$$

Para calcular o punto de corte, resolvemos o sistema formado polas ecuacións da recta e a do plano:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 3 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Punto\ de\ corte: (0,3,4)}$$

b) Se α = ángulo que forman π e r, entón:

$$sen\alpha = \cos(90 - \alpha) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{6}{\sqrt{2}\sqrt{72}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}}$$

Chamemos β ao plano que contén a r e é perpendicular a π. Os vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{n}_\pi$ son polo tanto vectores contidos no plano β

Como β contén a r, os puntos da recta son puntos de β. Por exemplo,

$$(4,3,0) \in r \Rightarrow (4,3,0) \in \beta$$

Como non se especifica ningún tipo de ecuación do plano, podemos dar calquera, por exemplo as paramétricas:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 4 - \lambda + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = \lambda \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{cosx - e^{-2x} - 2x}{sen^2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-senx + 2e^{-2x} - 2}{2senxcosx} = \lim_{x\to 0} \frac{-cosx - 4e^{-2x}}{2cos^2x - 2sen^2x} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

b)

Lonxitudes das partes: $x;\ 2x;\ 70-3x$

Función a minimizar:

$$f(x) = \frac{1}{16}\left[x^2 + 4x^2 + (70-3x)^2\right] = \frac{1}{16}\left(14x^2 - 420x + 4900\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{16}(28x - 420)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \iff x = \frac{420}{28} = 15 \\ f''(x) = \frac{28}{16} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (15, f(15)) \text{ mínimo}$$

$$\boxed{Lonxitudes\ das\ partes: 15cm; 30cm; 25cm}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a)

$f'(x)$ é unha primitiva de $f''(x)$, así que calculamos a integral indefinida de $f''(x)$:

$\int(4e^{2x} - 2x)dx = 2e^{2x} - x^2 + C$

Para determinar a constante C usamos que $f'(0)$ = pendente da recta $x - y + 3 = 0$. Polo tanto

$1 = f'(0) = 2 + C \Rightarrow C = -1$

Entón, $f'(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1$

Calculamos a integral indefinida de $f'(x)$, posto que $f(x)$ é unha primitiva de $f'(x)$

$\int(2e^{2x} - x^2 - 1)dx = e^{2x} - \frac{x^3}{3} - x + K$

E para determinar a constante K, usamos que $f(x)$ pasa polo punto $(0,1)$

$1 = f(0) = 1 + K \Rightarrow K = 0$

Así:

$$\boxed{f(x) = e^{2x} - \frac{x^3}{3} - x}$$

b)

$\int xsen(2x+\pi)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x+\pi) + \int\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x+\pi) + \frac{1}{4}sen(2x+\pi) + C$

$$\left\{\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = sen(2x+\pi)dx \Rightarrow v = -\frac{\cos(2x+\pi)}{2} \end{array}\right\}$$

$\int_0^{\pi/2} xsen(2x+\pi)dx = \left[-\frac{x}{2}\cos(2x+\pi) + \frac{1}{4}sen(2x+\pi)\right]_0^{\pi/2} = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & m & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m-1 & m \\ 0 & m-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos o rango de C:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$

$|C| = m - (m-1)^2 - 1 = -m^2 + 3m - 2;\ |C| = 0 \Leftrightarrow m = 1\ ou\ m = 2$

Polo tanto:

Se $m = 1\ ou\ m = 2$, entón $rang(C) = 2$

Se $m \notin \{1,2\}$, entón $rang(C) = 3$

Calculamos o rango da matriz ampliada C^*:

Se $m \notin \{1,2\}$, entón $rang(C^*) = 3$ (sempre $rang(C^*) > rang(C)$)

<u>$m = 1$:</u>

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(C^*) = 3$

<u>$m = 2$:</u>

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rang(C^*) = 3$

<u>Discusión:</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 1\ ou\ m = 2 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(C^*).\ Sistema\ incompatible. \\ m \notin \{1,2\} \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(C^*) = nº\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado. \end{array}}$$

b)

Para $m = 3$, estamos no caso dun sistema compatible determinado e polo tanto ten solución única. Calculamos a solución utilizando a regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2};\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{2};\quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = 3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = 3 \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Determinamos un vector director e un punto de cada unha das rectas:

$P_r(4,1,0)$; $\quad \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (-3,5,1)$

$P_s(1,2,5)$; $\quad \vec{v}_s = (1,-2,0)$

Coordenadas non proporcionais. Polo tanto, as rectas córtanse ou crúzanse

Para saber se se cortan ou se cruzan, estudiamos o $rang(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s})$, polo anterior xa sabemos que $rang(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 1 - 6 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad rang\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}\right) = 2$$

$$\boxed{As\ rectas\ córtanse}$$

Para calcular o punto de corte, sustituimos a x, y e z das ecuacións de s nas ecuacións de r:

$$1 + \lambda + 2 - 2\lambda - 10 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -12$$
$$2 - 2\lambda - 25 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -12$$

E substituíndo nas ecuacións de s, obtemos as coordenadas do punto de corte

$$\boxed{Punto\ de\ corte: (-11,26,5)}$$

b) Como o plano contén ás rectas, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ son dous vectores contidos no plano e polo tanto, $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ é un vector normal ao plano. Ademais, calquera punto das rectas tamén pertence ao plano, por exemplo $P_r(4,1,0)$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2,1,1)$$

Ecuación implícita:

$$2(x-4) + (y-1) + z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x + y + z - 9 = 0}$$

c)

$$d(Q,s) = \frac{|\overrightarrow{P_sQ} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{5}}$$

$$\overrightarrow{P_sQ} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-1,1)$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

Para que $f(x)$ sexa continua en $x = 1$

a) $\left.\begin{array}{l} lim_{x\to 1^-} f(x) = m \\ lim_{x\to 1^+} f(x) = a + b + 1 = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m = a + b + 1$

$$f'(x) = \begin{cases} m & se\ \ x < 1 \\ 2ax + b & se\ \ x > 1 \end{cases}$$

Entón, debe cumprirse:

$\left.\begin{array}{l} m = \ \ a + b + 1 \\ m = 2a + b \end{array}\right\}$ ← Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$

$6a + b = 0$ ← $(f'(3) = \ 6a + b, f'(3) = 0,$ por ter un extremo relativo en $x = 3.)$

Resolvendo este sistema obtense:

$$\boxed{m = -4;\ \ a = 1;\ \ b = \ -6}$$

b) Teorema do valor medio do cálculo diferencial: Se $f(x)$ é continua no intervalo $[a, b]$ e derivable en (a, b), entón existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - \ f(a)}{b - \ a}$$

é dicir, a tanxente á gráfica de $f(x)$, no punto $x = c$, é paralela ao segmento que une os puntos $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Para os valores dados, a función é derivable en $\mathbb{R}$ (en $(-\infty, 1)$ e $(1, \infty)$ é polinómica e para eses valores xa vimos que era derivable en $x = 1$) e ademais

$$f(x) = \begin{cases} -4x & se\ \ x < 1 \\ x^2 - \ 6x + 1 & se\ \ x \geq 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -4 & se\ \ x < 1 \\ 2x - 6 & se\ \ x \geq 1 \end{cases}$$

Temos que encontrar un $c \in (0,5)$ tal que $f'(c)$ coincida coa pendente do segmento que une os puntos $(0,0), (5, -4)$, é dicir:

$$f'(c) = \frac{-4-0}{5-0} = -\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad 2c - \ 6 \ = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2c = \frac{26}{5}$$

$$\boxed{c = \ {}^{13}/_{5}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a)

$$e^x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$$

$$\int \frac{2}{3+3e^x}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+e^x}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t(1+t)}dt = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t}dt - \frac{2}{3}\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{2}{3}ln|t| - \frac{2}{3}ln|1+t| + C =$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t+A}{t(t+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$= \frac{2}{3}[x - \ln(1+e^x)] + C$$

$$e^x = t \Rightarrow x = lnt$$

e aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x}dx = \frac{2}{3}[x - \ln(1+e^x)]_0^1 = \frac{2}{3}[1 - \ln(1+e) + ln2]$$

$$\boxed{Solución: \frac{2}{3}ln\frac{2e}{1+e}}$$

b) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$, entón a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e ademais $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

Indeterminación $\frac{0}{0}$ aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3+3e^x} = \boxed{\frac{1}{3}}$$